

Esercitazione di Logica Matematica

Stefano Zacchioli
zack@cs.unibo.it

1 Marzo 2007

1 Induzione

1.1 Induzione Strutturale su fbf

Riepilogo

- definizione del linguaggio delle formule ben fondate (fbf)
- teorema di induzione strutturale per fbf

Esercizio 1 Sia f una fbf, sia $|f|_o$ il numero di parentesi aperte (“(”) che compaiono in essa e analogamente sia $|f|_c$ il numero di parentesi chiuse (“)”) che compaiono in essa. Dimostrare (o confutare) che per ogni fbf f , $|f|_o = |f|_c$.

Esercizio 2 Sia f una fbf. Siano $|f|_o, |f|_c$ definiti come da Esercizio 1. Siano inoltre $|f|_b$ il numero di connettivi binari (“ \wedge ”, “ \vee ”, “ \rightarrow ”) che compaiono in f e $|f|_u$ il numero di connettivi unari (“ \neg ”) che compaiono in f . Dimostrare (o confutare) che per ogni fbf f , $|f|_o + |f|_c = 2 * (|f|_b + |f|_u)$.

Esercizio 3 Sia \mathcal{F} il linguaggio delle fbf nelle quali non compare il connettivo \perp . Sia f una fbf in \mathcal{F} . Siano $|f|_o, |f|_c, |f|_b, |f|_u$ definiti come da Esercizio 2. Sia inoltre $|f|_a$ il numero di simboli atomici di proposizione che compaiono in f . Dimostrare (o confutare) che per ogni $f \in \mathcal{F}$, $|f|_a \geq |f|_b + |f|_u$.

Esercizio 4 Siano $\mathcal{F}, |f|_o, |f|_c, |f|_b, |f|_u, |f|_a$ definiti come da Esercizio 3. Dimostrare (o confutare) che per ogni $f \in \mathcal{F}$, $|f|_a > |f|_b$.

1.2 Induzione su \mathbb{N}

Esercizio 5 Trovare l'errore nella dimostrazione del seguente teorema:

Teorema. $\forall n \in \mathbb{N}, n \neq 0 \Rightarrow n = n + 1$ (i.e. $|\mathbb{N}| = 2$).

Dimostrazione. Per induzione su n .

Caso base. $n = 0$. Devo dimostrare che se $n \neq 0$ allora $n = n + 1$. La premessa $n \neq 0$ è falsa, quindi l'implicazione è trivialmente dimostrata.

Caso induttivo. $n = S m$. Devo dimostrare che se $n \neq 0$ allora $n = n + 1$. Dato che $n = S m$ so che $n \neq 0$ quindi la premessa dell'implicazione è verificata. Devo dimostrare $n = n + 1$, ovvero che $S m = (S m) + 1$. Per ipotesi induttiva so che $S m = (S m) + 1$ che conclude la dimostrazione.

2 Semantica (via Tavole di Verità)

Riepilogo

- tavole di verità dei connettivi logici
- interpretazione, modello, soddisfacibilità, tautologia, contraddizione, conseguenza logica
- lemma di soddisfacibilità (Lemma 1.6, pag. 10)
- metodo combinatorio per verificare la soddisfacibilità di una fbf, sua complessità computazionale

Esercizio 6 Verificare quali delle seguenti fbf sono soddisfacibili, quali sono tautologie, quali sono contraddittorie:

1. $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
2. $\neg(A \rightarrow \neg A)$
3. $A \vee \neg A$
4. $\perp \rightarrow A$
5. $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$
6. $(A \wedge B) \vee (\neg B \vee C)$
7. $A \vee B \rightarrow A \wedge B$
8. $(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C))$
9. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow \neg C) \rightarrow \neg A)$

Esercizio 7 Verificare se il seguente l'insieme di formule $\{A \vee B, \neg B \vee \neg C, C \vee D, \neg D \vee C\}$ è soddisfacibile.