Esercitazione di Logica Matematica

Cinzia di Giusto Stefano Zacchiroli

7 Aprile 2008

1 Informazioni utili

- Tutte le domande di carattere didattico (es. esercizi e chiarimenti) vanno postate sul newsgroup del corso: `unibo.cs.informatica.logica`
- il materiale didattico viene pubblicato su: `http://www.cs.unibo.it/~zacchiro/teaching/0708/logica/`
- Altre informazioni possono essere richieste via e-mail a: Cinzia Di Giusto `<digiusto@cs.unibo.it>`, Stefano Zacchiroli: `<zack@cs.unibo.it>`
- Il ricevimento può essere fissato tramite e-mail a `<digiusto@cs.unibo.it>`

2 Deduzione Naturale Proposizionale

Riepilogo

- regole della deduzione naturale proposizionale
- strategie per la deduzione naturale proposizionale

Esercizio 1 *Dimostrare, utilizzando il calcolo della deduzione naturale e partendo dall'insieme vuoto di premesse, la validità delle seguenti formule:*

1. $(A \to B) \to (A \to C) \to A \to B \wedge C$
2. $A \vee B \to (C \to \neg B) \to (C \to A)$
3. $(B \to \neg A) \to A \to \neg B$
4. $A \vee B \to \neg(A \wedge B) \to ((A \to \neg B) \wedge (\neg B \to A))$
5. $A \wedge B \to (\neg C \to \neg B) \to C$
6. $(A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C))$
7. $(A \to (B \to C)) \to (A \wedge B \to C)$
8. $((A \to B) \wedge (A \to (B \to C))) \to (A \to C)$
9. $A \vee \neg A$
10. $\neg(A \wedge B) \to (\neg A \vee \neg B)$
11. $(\neg A \vee \neg B) \to \neg(A \wedge B)$
12. $\neg(A \vee B) \to (\neg A \wedge \neg B)$
13. $(\neg A \wedge \neg B) \to \neg(A \vee B)$
14. $\neg(A \to B) \to \neg\neg C \to \neg(\neg A \vee B \vee C) \to \bot$

3 Metodo di Risoluzione

Riepilogo

- il metodo di risoluzione per la logica proposizionale

Esercizio 2 *Utilizzando il metodo di risoluzione dimostrare che:*

1. $(\neg d \to \neg a \vee b) \wedge (\neg a \to e) \wedge (d \to b \vee e) \models \neg b \to e$
2. $\neg((a \to (b \to c)) \vee (b \to (a \to c))) \to a \wedge b \wedge \neg c$ *è valida*
3. $(a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c))$*è valida*
4. $\neg((a \wedge b) \to c) \to \neg(a \to (b \to c))$*è valida*
5. $(\neg d \to a \vee b) \wedge (a \to e) \wedge (d \to b \vee e) \models \neg b \to e$
6. $p \vee \neg p$ *è valida*
7. $(\neg p \to \neg q) \to (q \to p)$*è valida*

Esercizio 3 *Dimostrare, utilizzando il metodo di risoluzione e partendo dall'insieme vuoto di premesse, la validità delle formule riportate nell'Esercizio 1.*

4 Equivalenze semantiche

Esercizio 4 *Trasformare in forma normale congiuntiva e disgiuntiva le seguenti formule:*

1. $\neg(B \to (A \vee (C \to D)))$
2. $(A \wedge \neg B) \vee \neg(C \to \neg D)$
3. $(A \to \neg B) \vee \neg(C \wedge D \to \neg(\neg C \vee E))$
4. $\neg(\neg A \to B) \vee (C \wedge \neg D) \to \neg E$
5. $(\neg A \to B) \vee \neg(C \wedge A \to \neg B)$

5 Interpretazioni

Esercizio 5 *Per ognuna delle seguenti formule fornire un'interpretazione in cui la formula è vera ed una in cui è falsa:*

1. $P = \exists x(P(x) \wedge Q(x)) \wedge \exists y(Q(y) \wedge R(y)) \to \exists z(P(z) \wedge R(z))$
2. $P = \exists x \forall y(A(x,y) \wedge \neg A(y,x)) \to (A(x,x) \leftrightarrow A(y,y)))$
3. $\exists x(A(x) \vee B(x)) \wedge \forall x(A(x) \to C(x)) \wedge \forall x(B(x) \to C(f(x))) \to \forall x C(x)$
4. $P = \exists x(P(x) \to Q(x)) \wedge \exists y(Q(y) \to R(y)) \to \exists z(P(z) \to R(z))$
5. $\forall x(A(x) \to B(f(x))) \wedge \exists y \neg B(f(y)) \to \forall y \neg A(y)$

6 Traduzioni dal linguaggio naturale

Esercizio 6 *Si traduca in un opportuno linguaggio al prim'ordine le seguenti frasi:*

1. *Ogni malato non stima se stesso.*
   Ci sono dottori che curano se stessi.
   Qualche malato stima tutti i dottori che lo curano.
   Tutti i malati stimano almeno un dottore che li cura.

2. *Un computer non è utilizzato da nessuno studente.*
   Ogni computer funzionante è utilizzato da almeno uno studente.
   Non tutti i computer sono funzionanti.

3. *Tutti i parenti di Claudio stimati da Claudio, sono stimati anche dal padre di Claudio*
   Claudio stima sé stesso e tutti quelli che stimano suo padre, ma non stima suo padre

4. *Se nessun cantante è stonato e tutte le persone stonate sono fastidiose allora qualche persona fastidiosa non è un cantante.*

5. *Se non tutti gli studenti sono studiosi e chi non studia non supera l'esame allora qualche studente non supera l'esame.*

6. *Se nessun amico di Marco vive a Milano e qualche ragazza è amica di Marco allora qualche ragazza non vive a Milano.*

7 Link

- Altri esercizi di deduzione naturale proposizionale e (cenni di) strategie:
  `http://tellerprimer.ucdavis.edu/1ch6.pdf`

- Esercizi svolti di deduzione naturale proposizionale:
  `http://www.danielclemente.com/logica/dn.en.html`