Esame di Logica Matematica - Soluzioni

12 Giugno 2008

Regolamento

- Lo studente dovrà indicare in **alto a sinistra sulla prima pagina** di ogni foglio utilizzato Nome, Cognome, Numero di matricola.
- Tutti i fogli utilizzati devono essere consegnati al termine della prova.
- Non è possibile consultare appunti o libri.

Esercizi

1. Si dimostri usando il calcolo della deduzione naturale che vale la seguente conseguenza logica:

$$\forall x(A(x) \vee B(x)) \models \exists x \neg A(x) \to \exists x B(x)$$

Soluzione:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{1}
\UnaryInfC{$A(x)$}
\AxiomC{}
\RightLabel{2}
\UnaryInfC{$\neg A(x)$}
\BinaryInfC{$\bot$}
\UnaryInfC{$\exists x B(x)$}
\AxiomC{}
\RightLabel{1}
\UnaryInfC{$B(x)$}
\UnaryInfC{$\exists x B(x)$}
\AxiomC{$\forall x(A(x) \vee B(x))$}
\UnaryInfC{$A(x) \vee B(x)$}
\RightLabel{1}
\TrinaryInfC{$\exists x B(x)$}
\AxiomC{}
\RightLabel{3}
\UnaryInfC{$\exists x \neg A(x)$}
\RightLabel{2}
\BinaryInfC{$\exists x B(x)$}
\RightLabel{3}
\UnaryInfC{$\exists x \neg A(x) \to \exists x B(x)$}
\end{prooftree}
$$

2. Si dimostri usando il metodo di risoluzione la conseguenza logica dell'esercizio precedente.

Soluzione: Clausole: $\{A(x), B(x)\}, \{\neg A(c)\}, \{\neg B(y)\}$

Risoluzione:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\{A(x), B(x)\}$}
\AxiomC{$\{\neg A(c)\}$}
\RightLabel{$x = c$}
\BinaryInfC{$\{B(c)\}$}
\AxiomC{$\{\neg B(y)\}$}
\RightLabel{$y = c$}
\BinaryInfC{$\square$}
\end{prooftree}
$$

3. È data la seguente formula:

$$P = \exists x(A(x) \vee B(x)) \wedge \forall x(A(x) \to C(x)) \wedge \forall x(B(x) \to C(f(x))) \to \forall x C(x)$$

La formula P è valida, soddisfacibile, oppure contraddittoria? Se P è valida se ne fornisca una dimostrazione nel sistema formale preferito. Se è contraddittoria si dimostri la formula $\neg P$. Se è soddisfacibile senza essere valida, si forniscano sia un'interpretazione in cui P è vera che una in cui P è falsa.

Soluzione: P è soddisfacibile, infatti:

$\mathcal{A} \models P, D^{\mathcal{A}} = \{0\}, f^{\mathcal{A}}(0) = 0 A^{\mathcal{A}} = B^{\mathcal{A}} = C^{\mathcal{A}} = \{0\}$

e

$\mathcal{B} \not\models P, D^{\mathcal{B}} = \{0,1\}, f^{\mathcal{B}}(0) = f^{\mathcal{B}}(1) = 0 A^{\mathcal{B}} = \{0\}, B^{\mathcal{A}} = \emptyset C^{\mathcal{B}} = \{0\}$

4. Si trasformi in clausole la seguente formula:

$$\forall x \forall y (\exists z A(z) \land \exists u B(x,u)) \to \exists v B(y,v)$$

Soluzione: Osservazioni: $\forall y$ è un quantificatore inutile non lega alcuna variabile pertanto può essere eliminato, la variabile y del predicato $B(y,v)$ è libera

Sfruttando le equivalenze logiche si ottiene la formula:

$$\exists v, \exists x, \forall z, \forall u (\neg A(z) \lor \neg B(x,u) \lor \neg B(y,v))$$

a questo punto per poter applicare l'algoritmo di skolemizzazzione la formula deve essere resa un enunciato, in questo caso poiché la skolemizzazione preserva solo la soddisfacibilità di una formula la variabile y è da chiudere con il quantificatore esistenziale:

$$\exists y, \exists x, \forall z, \forall u, \exists v (\neg A(z) \lor \neg B(x,u) \lor \neg B(y,v))$$

quindi sostituendo $y = a, x = b, v = f(z,u)$ la clausola che si ottiene è

$$\{\neg A(z), \neg B(b,u), \neg B(a, f(z,u))\}$$