Esercitazione di Logica Matematica

Cinzia Di Giusto Stefano Zacchiroli

13 Maggio 2008

1 Traduzioni

Esercizio 1 *Utilizzando i simboli di funzione* $0, succ, +, *$ *ed il predicato* $=$ *interpretati sui numeri naturali definire i seguenti predicati/enunciati:*

1. $P(y, z)$: *z è dispari e minore di y*
2. $P(x)$: *x è un numero che ha almeno 3 divisori distinti*
3. $P(x)$: *x ha un divisori dispari*
4. *Ogni numero primo maggiore di 2 è dispari*

2 Interpretazioni

Esercizio 2 *Per ognuna delle seguenti formule dire se la formula è valida, soddisfacibile, oppure contraddittoria. Se la formula è valida se ne fornisca una dimostrazione (in deduzione naturale o risoluzione). Se è contraddittoria si dimostri la validità della formula negata. Se è soddisfacibile senza essere valida, si forniscano sia un'interpretazione in cui la formula è vera che una in cui è falsa.*

1. $\forall x(\exists y A(x, y) \to \neg B(x) \vee \forall z(C(f(z) \to A(z, x)))$
2. $\exists x \forall y(A(x, y) \wedge \neg A(y, x) \to (A(x, x) \leftrightarrow A(y, y)))$
3. $\exists x(A(x) \vee B(x)) \wedge \forall x(A(x) \to C(x)) \wedge \forall x(B(x) \to C(f(x))) \to \forall x C(x)$
4. $\forall x(A(x) \to B(f(x))) \wedge \exists y \neg B(f(y)) \to \forall y \neg A(y)$

3 Validità

Esercizio 3 *Dimostrare, utilizzando il calcolo della deduzione naturale e partendo dall'insieme vuoto di premesse, la validità delle seguenti formule:*

1. $\forall(A(x) \to (\neg B(f(x), x) \wedge \forall B(x, y))) \wedge \exists(A(x) \wedge A(f(x))) \models \bot$
2. $\exists A(x) \to B(y) \models \forall x(A(x) \to B(y))$
3. $\neg \exists x \exists y(A(x) \wedge B(x, y)) \models \forall x(A(x) \to \neg B(x, f(x)))$
4. $\exists x(A(x) \to B(x)), \forall x \neg B(x) \models \neg \forall x(A(x) \wedge C(x))$

Esercizio 4 *Utilizzando il metodo di risoluzione dimostrare la validità delle formule dell'esercizio precedente.*

4 Soluzione dell'esercizio 2.1

Interpretazione che soddisfa:

$$A^{\mathcal{A}} = \emptyset$$

Interpretazione che non soddisfa: Ragionamento: deve esistere un elemento x del dominio che rende la formula (chiamiamola F) falsa, per rendere F falsa è necessario che $\exists y A(x, y)$ sia vera, $\neg B(x)$ falsa e che esista un elemento z tale che $C(f(z))$ sia vera e $A(z, x)$ falsa.

$$A^{\mathcal{B}} = \{(0, 1)\}$$

$$B^{\mathcal{B}} = \{0\}$$

$$C^{\mathcal{B}} = \{1\}$$

$$f^{\mathcal{B}}(0) = \{1\} \qquad f^{\mathcal{B}}(1) = \{0\}$$